

Arnold Sommerfeld: His Life and Perception of Quantum Theory

Michael Eckert, Deutsches Museum, München

Outline

- **Before the quantum (1868-1909)**
- **Becoming the „quantum pope“ (1909-1928)**
- **Wave mechanics in action (1929-1951)**

- **Bremsstrahlen in the classical theory (1909)**
- **The h -hypothesis (1911)**
- **Bremsstrahlen in the old quantum theory (1920-24)**
- **Sommerfeld's „Pacific Problem“ (1929-1939)**

- **The long life of the bremsstrahlen problem**

Early career

1868 Born in Königsberg

1886-1892 **Königsberg**, University
Studied mathematics, physics and natural sciences

1892-1897 **Göttingen**, University
Assistant of Th. Liebisch (mineralogy)
Assistant of F. Klein (mathematics)
Privatdozent

1897-1900 **Clausthal**, Bergakademie
Professor of mathematics

1900-1906 **Aachen**, Technische Hochschule
Professor of mechanics

Since 1906 **München**, Universität
Professor of theoretical physics



Becoming the „quantum pope“ (1909-1928)

1911 Solvay Congress

1915-1916 Extending Bohr's model

„I do not believe I have ever read anything that gave me so much pleasure“ (Bohr)

1919-1924 *Atomic Structure and Spectral Lines*

„Today, it is the Bible of the modern physicist.“ (Born)

„St. Sommerfeldus... the quantum pope.“ (Ehrenfest)

1928 *Wave Mechanics*



Wave mechanics and politics (1929-1951)

1929-1933 Propaganda for wave mechanics

1937 Sommerfeld as a „White Jew“

„The Jewish spirit is certainly most clearly recognizable in the field of physics...“

1938 *Wave Mechanics (2nd edition)*

1939-1945 Sommerfeld's successor

1948 Oersted medal

„His Ergänzungsband, the second volume of Atomic Structure and Spectral Lines, was perhaps the most influential of the early scholarly interpretations of wave mechanics.“

PRÄSIDENT PROFESSOR DR. J. STARK UND
UNIV.-PROFESSOR DR. WILHELM MÜLLER

JÜDISCHE UND DEUTSCHE PHYSIK

Vorträge zur Eröffnung des Kolloquiums

für theoretische Physik

an der Universität München

herausgegeben

von

DR. WILHELM MÜLLER

Professor der theoretischen Physik

an der Universität München

HELINGSCHE VERLAGSANSTALT LEIPZIG

Sommerfeld's favorite problem: bremsstrahlung

„... everybody has certain domains which they think are their own and they want to work in them pretty undisturbed and an example of that was Sommerfeld's never-dying interest in the continuous x-ray spectrum...“

(Otto Laporte, AHQP-interview)

1909: Sommerfeld elaborates the classical „bremstheory“ as an argument against the light quantum hypothesis

Über die Verteilung der Intensität bei der Emission von Röntgenstrahlen.

Von A. Sommerfeld.

Die kürzlich von J. Stark¹⁾ publizierten Beobachtungen, die eine ausgesprochene Dis-symmetrie der von einer Kohlenantikathode ausgesandten Röntgenstrahlung zu zeigen schei-nen, veranlassen mich, Überlegungen mitzuteilen, die mich seit längerer Zeit beschäftigen. Ich gehe dabei von der wohlbekanntem Wiechert-Stokesschen Vorstellung aus, die den Ur-sprung der Röntgenstrahlung in der Bremsung des Kathodenstrahlelektrons sieht. Allerdings kann diese Vorstellung nach unseren heutigen durch die Untersuchungen von Barkla²⁾ be-stimmten Anschauungen nur einen Teil, und zwar im allgemeinen nur einen kleinen Teil

1) Diese Zeitschr. 10, 902, 1909.

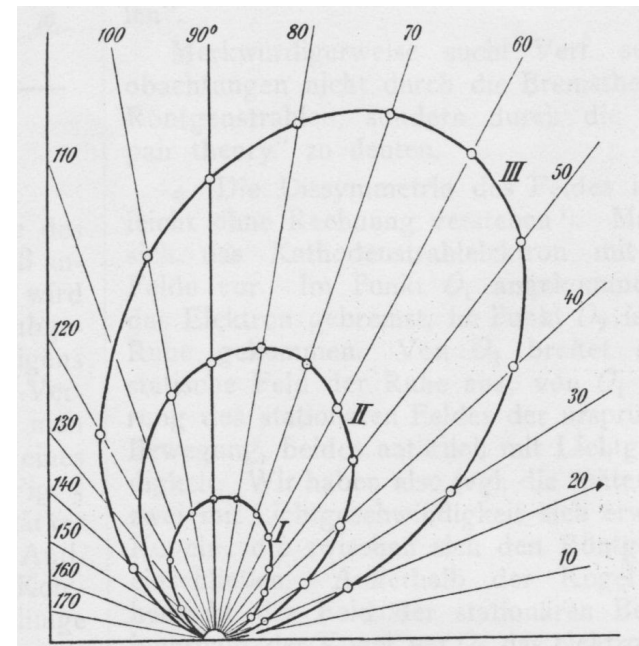
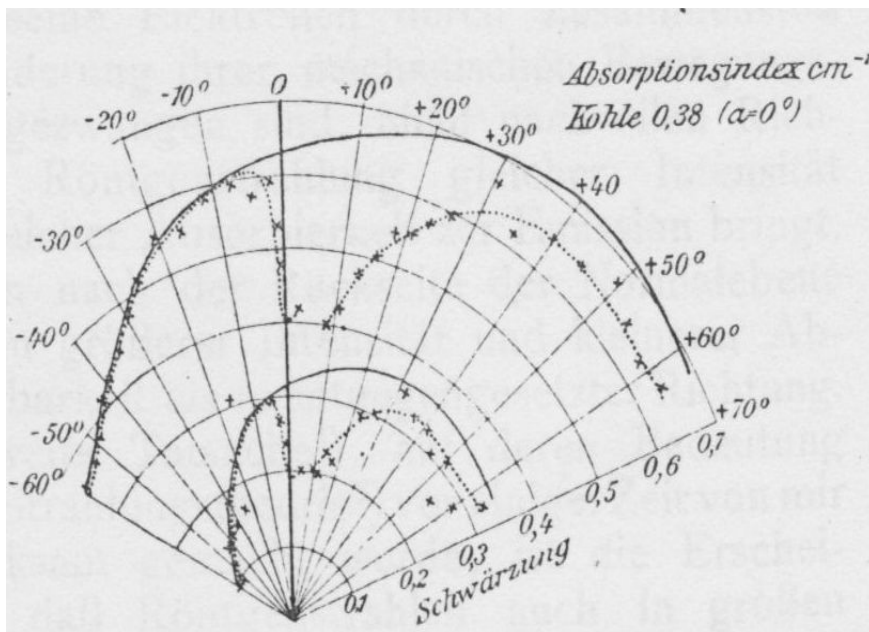
2) Diese beziehen sich auf Sekundärstrahlen. Ihre Über-tragung auf Primärstrahlen wird durch die Unterschiede im Verhalten von Platin, Aluminium und Kohle als Antikathode nahegelegt.

der als Röntgenstrahlung wahrgenommenen In-tensität wiedergeben. Er ist überlagert von einem zweiten Teil, der mehr den Charakter einer Fluoreszenzstrahlung¹⁾ (Eigenstrahlung) zu haben scheint. Bei kleinem Atomgewicht des Antikathodenmaterials überwiegt der erste Be-standteil, bei größerem der zweite. Der erste Bestandteil ist der Theorie nach vollständig polarisiert und weist charakteristische Intensi-tätsunterschiede nach den verschiedenen Rich-tungen auf, wenn die Bremsung geradlinig er-folgt. Geschieht sie im Zickzack, wobei jedoch die ursprüngliche Kathodenstrahlrichtung vor-herrschen wird, so wird für die im ganzen re-sultierende Strahlung die Polarisation unvoll-ständig und die Richtungsverschiedenheit der Intensität weniger deutlich. Der zweite Be-standteil ist allseitig ungeordnet und unpolari-siert. Diese Unterscheidung erklärt, warum bei den gewöhnlichen Platinantikathoden der po-

1) Vgl. das lehrreiche Referat von Barkla in Proc. Cam-bridge Phil. Soc., Vol. 15, S. 257, insbesondere S. 268, Mai 1909, und J. Stark, diese Zeitschr. 10, 580, 1909.

„You will, as I hope, persuade yourself that the Bremstheorie (theory of braking) of x rays yields everything by itself for which you employ the (still rather hypothetical and uncertain) light quantum theory. Not that I doubt the importance of the quantum of action. But the way in which you elaborate it appears not only to me but also to Planck very daring.“

(Sommerfeld to Stark, 4 December 1909)



„I am old-fashioned enough to resist for the present Einstein's view of the light quanta. I assume that you will also not like Stark's light quanta, against which I have recently spoken up.“

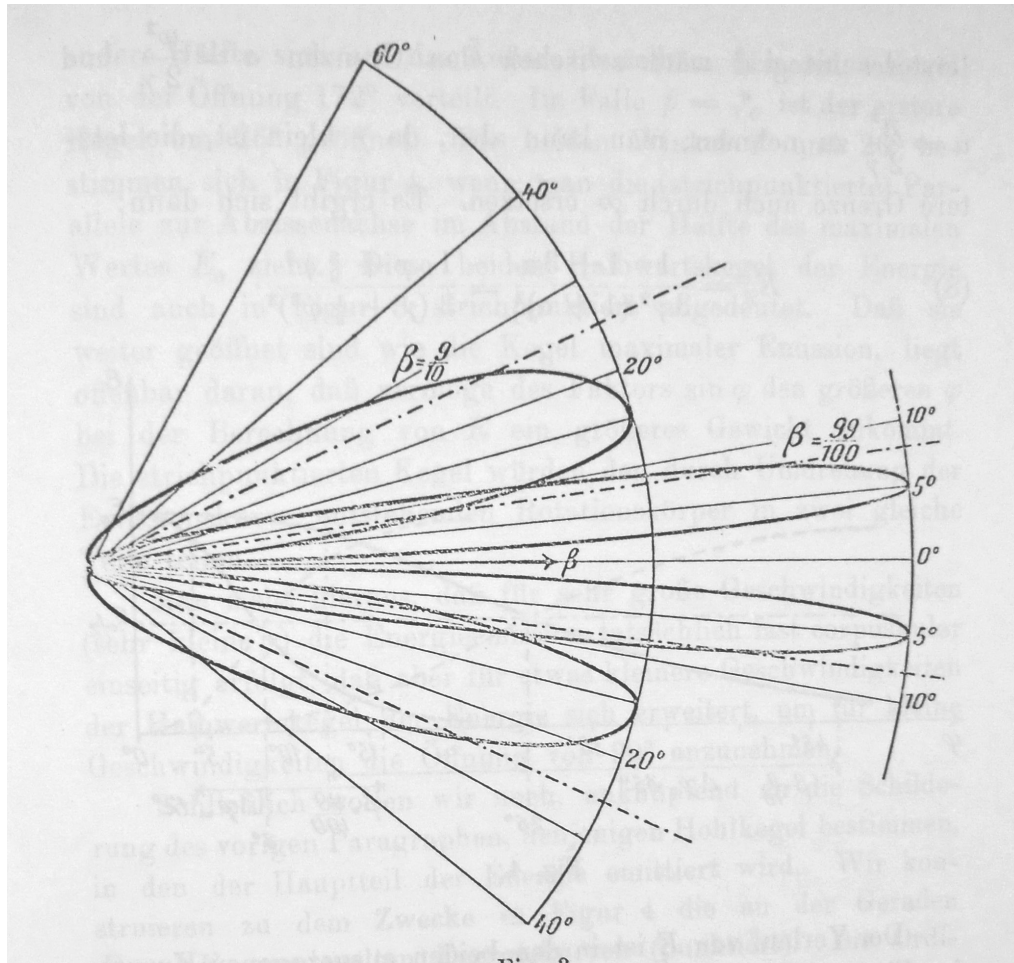
(Sommerfeld to Lorentz, 9 January 1910)

„For a long time nothing in physics impressed me so strongly as your work on the energy distribution of x rays over the various directions.“

(Einstein to Sommerfeld, 19 January 1910)



1911: the h -hypothesis



length of acceleration

$$\frac{E_\beta}{E_\gamma} = \frac{6 \pi c^2 l \sqrt{1 - \beta^2}}{e \left(\frac{e}{m_0} \right) \beta}$$

duration of acceleration

$$E \tau = h$$

$$\frac{E_\beta}{E_\gamma} = \frac{6 \pi c h}{e^2} \frac{1 - \beta^2}{\beta^2} (1 - \sqrt{1 - \beta^2})$$

1977-28/A, 263

Osnabrück, 6. 4. 11.

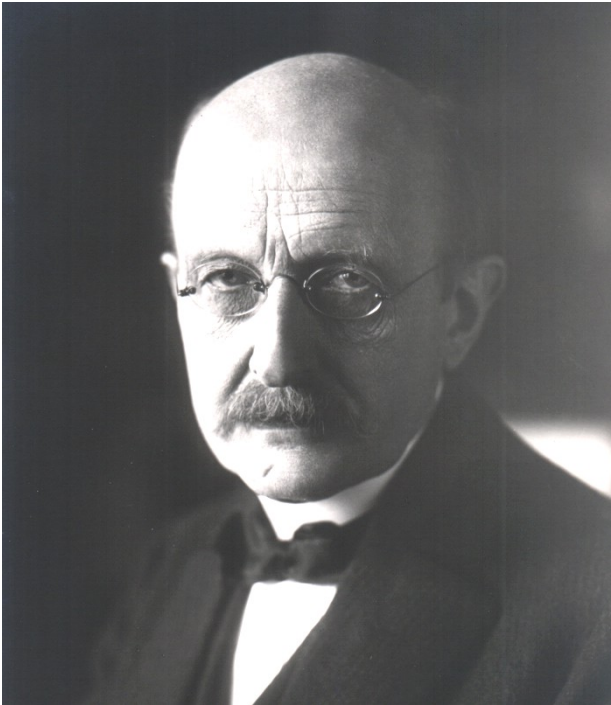
DEUTSCHES MUSEUM
Archiv

Sehr geehrter Hr. Kollege!

Bei meiner Rückkehr von der kleinen Jagdzeitung (habe
Lust auf für Ihre feinsten Grundsätze!) finde ich Ihre
Uebung über die Theorie der g. Theorien, welche Ihnen
liebenswürdiger Weise am 12. März, so sehr mich
interessiert hat in die Lesung verleiht. Glauben Sie mir,
Ihre auf der Stelle folgende an dem Punkte zu bringen,
da Sie so interessanter mich folgende z. Verhältnisse
auf mich wirken.

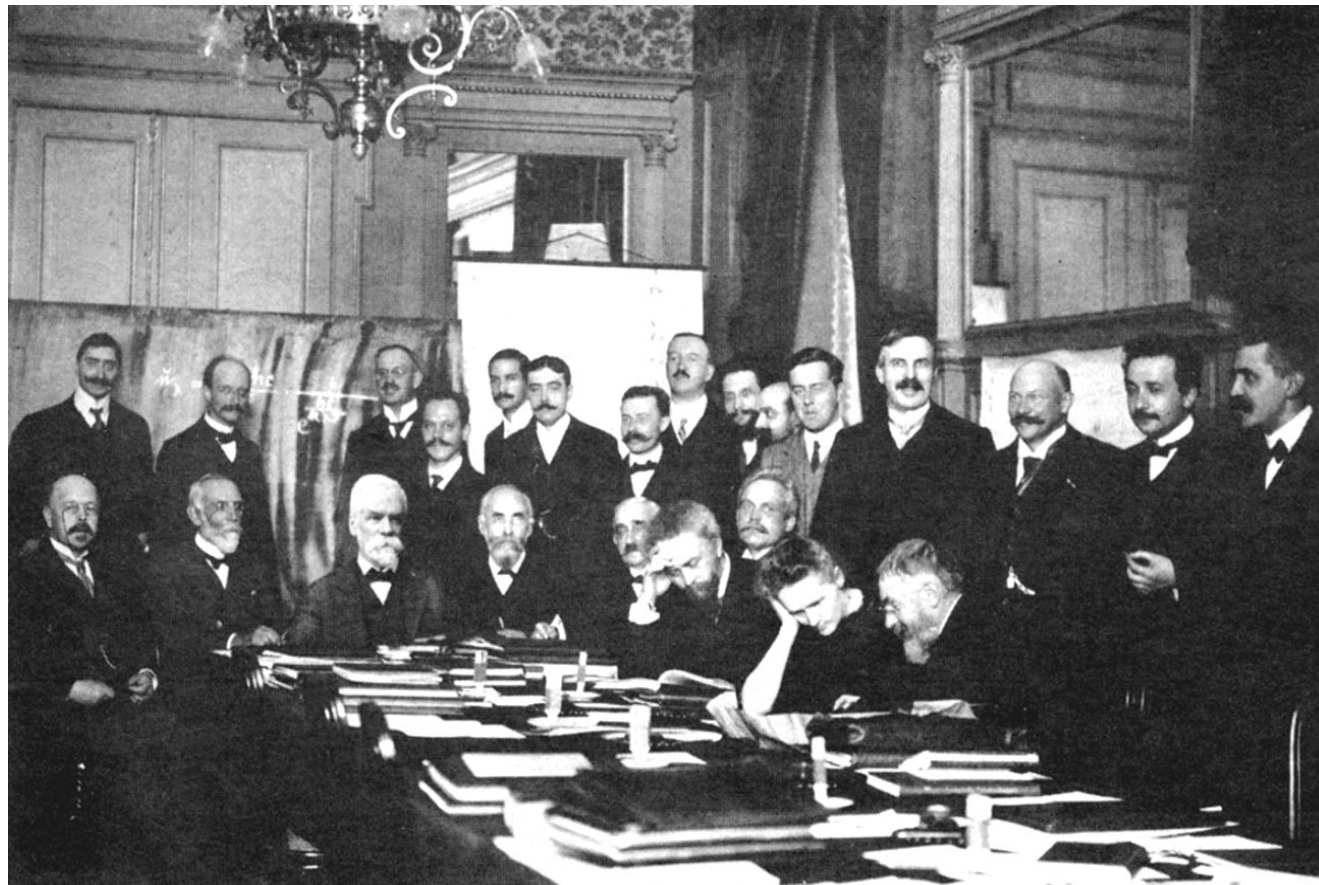
Der beachtenswerte Fortschritt scheint mir zu liegen in
der Erweiterung der Bedeutung des h für unperiodische Pro-
zesse. In meiner kritischen Untersuchung habe ich immer
mit Objektivität von bestimmten Eigenschaften v. behauptet,
so dass es nicht möglich ist ein bestimmtes Element h v.
Nimmt man aber ein Objekt, das kein mit geeigneter
Freiwilligkeit, so entspricht für ihn ein bestimmtes
Element h, so man muss auf die gewisse Bedeutung
von h zurückgehen. Es wird richtig ^{gemessen} sein
das Resultat $h = \tau \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ in den folgenden zu
verfügen: $h = \int dt m_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2}$. (B ist Funktion von t behauptet)

Carl-
reche
Dies sehr ist vermerkt in meiner „Dynamik bewegter Körper“
(Ann. d. Phys. 26, p. 23, 1908) vermerkt, nur aber nicht
im Thema, damit aber Osnabrück angegeben. —
Zusätzlich aber ist mir Ihre Angaben insbesondere sehr
interessant und ich fühle mich für die Zurückkunft sehr zu danken.



„The most important progress appears to me your extension of the meaning of h for unperiodic processes. I find your procedure extremely congenial and promising also for the future.“

(Planck to Sommerfeld, 6 April 1911)



RAPPORT SUR L'APPLICATION DE LA THÉORIE DE L'ÉLÉMENT D'ACTION
AUX PHÉNOMÈNES MOLÉCULAIRES NON PÉRIODIQUES, par M. A. Sommerfeld.

I. Éléments d'énergie et élément d'action.....	313
II. Théorie des rayons de Röntgen.....	321
III. Théorie des rayons γ	334
IV. L'effet photo-électrique.....	344
V. Indication d'une théorie du potentiel d'ionisation.....	363
VI. Comparaison avec les hypothèses des quanta d'énergie et des quanta d'émission de Planck.....	367
<i>Discussion du Rapport de M. Sommerfeld.....</i>	<i>373</i>

ainsi à l'hypothèse fondamentale suivante pour la signification générale de h :

Dans tout phénomène moléculaire pur, l'atome prend ou perd une quantité d'action déterminée de manière universelle et de grandeur

$$\int_0^{\tau} \mathfrak{E} dt = \frac{h}{2\pi};$$

τ est la durée de l'action et \mathfrak{E} sera d'ordinaire considéré simplement comme une abréviation pour $(T - U)$.

sions moléculaires, il me semble qu'on ne peut comprendre à ce point de vue la signification universelle de la constante h .

Il me semble préférable de se placer au point de vue opposé, en cherchant, non pas à déduire h des dimensions moléculaires, mais en considérant l'existence des molécules comme une conséquence de l'existence d'un élément d'action. Une explication électromagnétique ou mécanique de l'existence des éléments d'action me semble aussi peu probable que l'explication mécanique des équations de Maxwell. Il me semble beaucoup plus utile de développer les multiples conséquences de l'hypothèse des éléments d'action et de l'appliquer à d'autres phénomènes. Puisqu'il n'est pas douteux que notre Physique exige un nouveau principe tout à fait indépendant de la représentation électromagnétique, il me semble qu'on doit s'adresser tout d'abord dans ce sens à l'hypothèse des éléments d'action.

5° Pour justifier enfin l'énoncé particulier que nous avons donné de notre principe, nous nous reporterons à la transformation fondamentale de l'équation (4) au moyen d'une intégration par parties. Cette transformation est rendue possible parce qu'il figure dans \mathcal{H} la différence des énergies cinétique et potentielle. Si nous avons introduit, au contraire, l'énergie cinétique T ou l'énergie totale $T + U$, notre transformation, qui s'appuie sur l'introduction de l'équation du mouvement, disparaîtrait et avec elle notre explication du phénomène photo-électrique. Cette même circonstance exige l'introduction de $(T - U)$ dans l'énoncé du principe d'Hamilton en Mécanique et permet d'obtenir les équations du mouvement, à partir du principe de moindre action. Je vois dans cette analogie, avec les principes de la Mécanique, une raison très sérieuse pour croire à la nécessité d'énoncer le principe des éléments d'action comme nous l'avons fait.

V. — INDICATION D'UNE THÉORIE DU POTENTIEL D'IONISATION.

Il y a beaucoup d'analogie entre le phénomène d'ionisation des gaz et l'effet photo-électrique. Il s'agit, dans les deux cas, de la libération d'un électron à partir du lien atomique par des actions électro-magnétiques : dans un cas, ces actions sont dues aux champs périodiques de la lumière incidente et, dans l'autre, aux champs

„It appears to me more preferable to adopt the opposite view, not to try to derive h from molecular dimensions, but to consider the existence of molecules as a consequence of the existence of a quantum of action. An electromagnetic or mechanical explanation of the quanta of action seems to me as unlikely as the mechanical explanation of Maxwell's equations...

(...)

The theory can satisfy in the present form only if these consequences are confirmed quantitatively. Experiments to this end are prepared in my institute.“

(Sommerfeld, Solvay-Proceedings)

Leuz: Hydrodynamische Demonstration
(Jansens Reibung, Stahlzuckung)

14.) Mi. 19 Juli 11.

Hr. Szilenter: Radioaktiver Rückstrahl
(Marekov u. Rukh, Hahn, Kas. Fajans)

Wintersemester 1911/12.

1.) Mi. 8. Nov. 11.

Hr. Leuz: Townsend, Ionisierung
durch Stoss.

2.) Mi. 15 Nov. 11.

Hr. Friedrich: Polarisation der
X-Strahlen (Dini.)

3.) Mi. 22. Nov. 11.

Hr. Friedrich, Fortsetzung.

Hr. Ewald: Demonstration von J.J. Thomson's
Atommodell; Wilson's Atomgewichts-
bestimmung. (Phil. Mag. 1911).

4.) Mi. 26. Nov. 11. Solenne Coll.

Prof. Sommerfeld: Die Brüsseler
Quantenkonferenz.

5.) Mi. 6. Dez. 11.

Hr. Ewald: J.J. Thomson's und Ruther-
ford's Theorie der Streuung der α -Teilchen
durch Materie.

Hr. Duchvald: Optisches Analogon
zur Polarisation der X-Strahlen.

6.) Mi. 13. Dez. 11.

Hr. Kossel: Untersuchungen über
Kathodenstrahlen. Lenard's Dynamik

1951-5

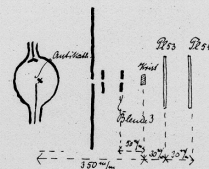
INSTITUT
FÜR THEORET. PHYSIK
MÜNCHEN, UNIVERSITÄT,
LUDWIGSTRASSE 17.

MÜNCHEN, DEN 4. Mai 1912.

Die Untersucherinnen beschäftigen sich seit 21 April 1912
mit Interferenzerscheinungen von X-Strahlen beim Durch-
gang durch Kristalle. Letzter Gedanke war daß Inter-
ferenzen als Folge der Bragg'scher Struktur der Kristalle
auftreten, weil die Gitterkonstanten ca 10 x größer sind,
als die mittelmäßige Wellenlänge der X-Strahlen.
Als Beweis wird Aufnahme N° 53 in 54 niedergelegt.

Kristallstrahlkörper: Kumpferstufel
Exponiert 30' Strom in der mittelmäßigen Röhre 2 Milliamper
Abstand der Ratten vom Kristall: $\alpha^{\circ} 53 = 30 \mu\text{m}$; $\alpha^{\circ} 54 = 60 \mu\text{m}$.
Abstand der Blende B ($\phi 1,5 \mu\text{m}$) $50 \mu\text{m}$.
Abstand des Austrittspunktes der Primärstr. vom Kristall = $350 \mu\text{m}$

Schemata der Versuchsanordnung.



DEUTSCHES MUSEUM
Archiv

Friedrich. P. Knipping. M. Laue.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 41.

1. *Theorie des lichtelektrischen Effektes vom Standpunkt des Wirkungsquantums; von P. Debye und A. Sommerfeld.*

Inhalt: § 1. Einleitung und Allgemeines p. 873. — *I. Teil. Monochromatisches Licht* p. 881. § 2. Vollkommene Resonanz zwischen auffallender Welle und Eigenschwingung p. 881. § 3. Unvollständige Resonanz p. 887. § 4. Die Kurven der Wirkung und der kinetischen Energie p. 890. § 5. Ergänzungen und Modifikationen p. 894. § 6. Einfluß der Dämpfung p. 898. — *II. Teil. Natürliches Licht* p. 903. § 7. Allgemeiner Ausdruck für die durch natürliches Licht erzeugte lichtelektrische Energie und die zugehörige Akkumulationszeit p. 903. § 8. Die Schwankungen der Energie und der Akkumulationszeit p. 908. § 9. Nachträgliche Berechnung zweier Integrale p. 914. § 10. Zusammenfassende und kritische Bemerkungen zu der vorgetragenen Theorie. Vergleich mit der Erfahrung p. 922.

§ 1. **Einleitung und Allgemeines.**

Während die Ausbreitung der elektromagnetischen Wirkungen in Raum und Zeit nach unserer Erfahrung durch die Maxwellschen Gleichungen ihre vollkommene Darstellung findet, steht die heutige theoretische Physik vor ernstesten Schwierigkeiten, wo es sich um die Erzeugung oder Absorption von Licht, die Erzeugung lichtelektrischer Wirkungen oder sekundärer Strahlungen handelt. Diese Schwierigkeiten haben sogar (in der Lichtquantenvorstellung) zu einer völligen Abkehr von der ursprünglichen Maxwellschen Theorie und zu Konstruktionen geführt, die zwar die genannten Schwierigkeiten in glücklicher Weise heben, dafür aber auf anderen Gebieten — namentlich bei den fundamentalen Interferenzfragen — um so ernstere Schwierigkeiten schaffen.

In der Überzeugung, daß die Plancksche Entdeckung des universellen Wirkungsquantums dazu berufen ist, die augenblicklichen Leiden der theoretischen Physik zu heilen,

[Accumulation orders of magnitude time shorter than predicted by the h -hypothesis (Sommerfeld/Debye 1913)]

(Marx/Lichtenecker 1913: Experimentelle Untersuchung... p. 160)

„The view, as if in such experiments an accumulation of energy documents itself in the structures (resonators) that emit electrons, has therefore to be refuted.“

(Meyer/Gerlach 1914: Über den photoelektrischen Effekt... p. 205)

I do well remember from earlier years the work of Marx and Lichtenecker about the duration of the photoelectric process, which was clarifying for the discussions about the quantal and classical energy transfer.

(Sommerfeld to Pöschl, 10 May 1927)]

1920-1924: Bremsstrahlung on the eve of quantum mechanics

Winter semester 1920/21:

Sommerfeld's special lecture on „Theory of X-rays“

Then he [Sommerfeld] said the first part of the semester would be devoted to the classical theory of the radiation of a decelerated body and the second part of the semester would be devoted, with Dr. Pauli's help, to the quantum theory.

(Laporte, Interview with T. S. Kuhn, AHQP)

Sommer semester 1922:

Kulenkampff's presentation in Sommerfeld's colloquium „On the Continuous X-ray Spectrum“

2. *Über das kontinuierliche Röntgenspektrum;* *von Helmut Kulenkampff.*

(Gekürzte Münchener Dissertation vom 9. Juni 1922.)

Im Gegensatz zur klassischen Theorie vom Wesen der kontinuierlichen Röntgenstrahlung hat die Entdeckung der quantenmäßigen Grenze des Spektrums (Duane-Huntsches Gesetz) zu der Auffassung geführt, zunächst, daß die Grenzfrequenz monochromatisch sein müsse, da sie anders nicht der maximal verfügbaren Energie zugeordnet sein kann; weiter, daß das Kontinuum in Wahrheit ein äußerst feines Viellinienspektrum sei, dessen jede Linie nach der Einsteinschen Gleichung des lichtelektrischen Effektes einer bestimmten Kathodenstrahlenergie $e \cdot V$ entstammt. Die Frage nach der Verteilung der Intensität auf verschiedene Wellenlängen wird damit zu einer statistischen Frage nach der Wahrscheinlichkeit bestimmter Umsetzungen der bei der Absorption der Kathodenstrahlen verfügbar gewordenen Energie; ihre Beantwortung erfordert genaue Kenntnis der Form des kontinuierlichen Spektrums.

Es ist nun ein unvermeidlicher Übelstand, daß Erzeugung wie Beobachtung der Röntgenstrahlen zahlreiche Entstellungen gerade der Intensitätsverteilung mit sich bringen. Die Röntgenstrahlen, in gewisser Tiefe der Antikathode entstehend, werden in ihr teilweise absorbiert, ebenso beim Austritt aus dem Entladungrohr durch dessen Glaswand oder besonderes Fenster; der Spektrometerkristall reflektiert im allgemeinen verschiedene Wellenlängen mit verschiedener Stärke. Die Messung der Strahlenergie, durch Ionisation oder durch die photographische Platte, kann nur auf dem Umwege über sekundäre Wirkungen erfolgen. Die Überwindung dieser Schwierigkeiten aber bietet der experimentellen Forschung lohnende Aufgaben.

„Kramers has a very nice theory of the continuous x-ray spectrum. The approach is exactly the same as the one I have made then... He is writing a paper in the Phil. Mag.“

(Pauli to Sommerfeld, 6 June 1923)

„Wentzel insists, as Laporte did, that this [Bremsstrahlen] was always a very lively subject of interest at Munich, dating back to Sommerfeld's early classical theory on the subject. Wentzel also remembers that he did not at all like Kramers' treatment of the subject, and wanted very much to try to improve upon it.“

(T. S. Kuhn, Interview with Wentzel, AHQP)

XCIII. On the Theory of X-Ray Absorption and of the Continuous X-Ray Spectrum. By H. A. KRAMERS, Copenhagen.*

§ 1. Definition of the problems and statement of the main results.

THE origin of the absorption of homogeneous X-rays in matter may be traced to processes of two essentially different types. By the first of these the energy of the radiation is diminished as a consequence of processes of transference between two stationary states of the atoms, consisting in the removal of electrons from the interior of the atom (true absorption). By the second, the direction of propagation of the radiation is partly altered as a consequence of the reaction of the electrons in the atoms against the electrodynamic forces in the field of radiation (scattering). The mass-absorption coefficient may therefore be written in the well-known form

$$\frac{\mu}{\rho} = \frac{\tau}{\rho} + \frac{\sigma}{\rho}, \quad (1)$$

where μ is the coefficient of the observed absorption, τ the coefficient of the true absorption, and σ the coefficient of absorption through scattering, while ρ is the density. Except for light elements and short wave-lengths, τ is large compared with σ .

As well known, the observed absorption may with great approximation be considered as the sum of the absorbing actions of the individual atoms. The absorption due to a single atom may with great approximation be calculated from the observed value for μ for an element by multiplying by the atomic weight A and dividing by Avogadro's number M . Writing $\mu A / \rho M = \alpha_{\mu}$, $\tau A / \rho M = \alpha_{\tau}$, and $\sigma A / \rho M = \alpha_{\sigma}$, we have thus for the atomic absorption coefficient :

$$\alpha_{\mu} = \alpha_{\tau} + \alpha_{\sigma}, \quad (2)$$

where α_{τ} corresponds to the true absorption and α_{σ} to the scattering of the rays. The quantity α has the dimensions of an area, and can be interpreted in the following way : Each atom acts as a small sphere of cross section α , which absorbs completely all the rays which strike its surface. The quantity α may therefore, with Lenard's terminology, be called the "effective cross section."

* Communicated by Prof. N. Bohr.

Zur Quantentheorie des Röntgenbremsspektrums.

Von Gregor Wentzel in München.

Mit vier Abbildungen. (Eingegangen am 24. Juli 1924.)

Die Bohrschen Grundpostulate der Quantentheorie (Strahlungslosigkeit der stationären Zustände, Emission und Absorption bei Übergängen nach dem $h\nu$ -Prinzip) sind auch auf unperiodische Systeme anwendbar; gegenüber den periodischen Systemen besteht aber der Unterschied, daß die stationären Zustände keine diskrete, sondern eine kontinuierliche Mannigfaltigkeit bilden, was sich im Gegensatz Linienspektrum—kontinuierliches Spektrum äußert. Nur im periodischen Falle lassen sich Frequenzbestimmung und Intensitätsbestimmung als getrennte Probleme behandeln; die kontinuierlichen Spektren dagegen sind ausgesprochene Intensitätsprobleme. Der Verfasser hat früher eine Regel angegeben, welche die Quantenvorschriften zur Bestimmung der Frequenzen (Quantenbedingungen, $h\nu$ -Prinzip) sowie der Intensitäten (Bohrs Korrespondenzprinzip) für die Linienspektren formal in sich vereinigt. Dieser Ansatz erweist sich nach entsprechender Verallgemeinerung auch für die Behandlung unperiodischer Probleme geeignet; er liefert die Intensitätsverteilung des kontinuierlichen Röntgenspektrums in Abhängigkeit von Kathodenspannung und Antikathodenmaterial in genauer Übereinstimmung mit den Messungen von Wagner und Kulenkampff¹⁾.

§ 1. Die Geschichte des Problems. Es ist verschiedentlich die Frage aufgeworfen worden, wie Bohrs Korrespondenzprinzip von den Linienspektren auf die kontinuierlichen Spektren übertragen werden kann. Mathematisch handelt es sich um den Übergang von der Fourierreihe zum Fourierintegral, vom periodischen zum unperiodischen System. Dem einfachsten periodischen Problem, der Ellipsenbewegung eines Elektrons um einen Kern, wie sie im Wasserstoffatom realisiert ist, entspricht als einfachstes unperiodisches System die Hyperbelbewegung um einen Kern, wie sie von Kathodenstrahlen in den Atomen einer Antikathode ausgeführt wird, und welche man für die Emission des Röntgenbremsspektrums verantwortlich macht. Diese Analogie zwischen Balmerreihe und Bremsspektrum führte Sommerfeld und Pauli²⁾ zu der folgenden Betrachtung. Das klassische Spektrum einer Keplerellipse würde aus lauter äquidistanten Linien bestehen und sich ins Unendliche erstrecken (Fig. 1, a); dagegen liegt die Seriengrenze der Balmerreihe (Fig. 1, b) im Endlichen (bei $\frac{1}{4}$ der Rydbergfrequenz R). Das Korre-

¹⁾ H. Kulenkampff, *Ann. d. Phys.* **69**, 548, 1922.

²⁾ Vorlesung von Prof. Sommerfeld in München, Wintersemester 1920/21.

It has often been discussed how Bohr's correspondence principle could be extended from line spectra to continuous spectra. Mathematically it deals with the transition from Fourier series to Fourier integrals, from the periodic to the unperiodic system. To the simplest periodic system, the elliptic motion of an electron around the nucleus, as it is realized in the hydrogen atom, corresponds as the simplest unperiodic system the hyperbolic motion around the nucleus. This is the motion of cathode rays in the atoms of an anti-cathode that is regarded as responsible for the emission of the Röntgen bremspectrum. This analogy between Balmer spectrum and bremspectrum led Sommerfeld and Pauli [in the winter semester 1920/21] to the following consideration...

(Wentzel, *Zeitschrift für Physik*, 1924)

„The attempt was to quantize the hyperbolic motion. ... The fact that the Fourier decomposition of a classical motion had something to do with the radiation was clear because Bohr's correspondence principle was always being used ... H as a function of all the J 's, then the partial of H with respect to a J gives you ω , and that's the classical analogue of the Bohr frequency relations; we made a great deal of that and that was regarded as something very, very sacred...“

(Laporte, Interview with T. S. Kuhn, AHQP)

„The magic power of the correspondence principle has generally proved itself... The principle has become the guide for all recent discoveries of Bohr and his pupils. Nevertheless I cannot regard it as satisfactory, not least because of its mixture of quantum-theoretical and classical viewpoints. I would like to regard the correspondence principle as a particularly important consequence of a future accomplished quantum theory, but not as its foundation.“

(Sommerfeld, Naturforscherversammlung Innsbruck, 1924)

Sommerfeld's „Pacific Problem“

„... I had a nice young man, Sugiura, as assistant (I called him my Secretary of Finance). He accompanied me everywhere and payed for railway travels on higher order.“

(Sommerfeld to his wife, 24 December 1928)

„Begin work on bremsstrahlung, after discussion with Sugiura. Looks promising but complicated.“

(Sommerfeld, entry in his travel diary, 29 December 1928)

„I am deeply immersed in a very beautiful work which I have begun in the Pacific.“

(Sommerfeld to his wife, 27 January 1929)

„Otherwise I was very busy this week with my Pacific problem which is worth the effort.“

(Sommerfeld to his wife, 3 February 1929)



„I am delighted to hear from Prof. Herzfeld that you can come to the Conference at Tuxedo on April 15th. The Conference is being given in your honor and in the honor of Prof. Ornstein, and I am expecting about ninety physicists.“

(Loomis to Sommerfeld, 11 February 1929)

„My interest in Green's function for the oscillation equation is revived anew because I found it suitable for the wave-mechanical diffraction problem. The work has begun in the Pacific and is slowly approaching its end.“

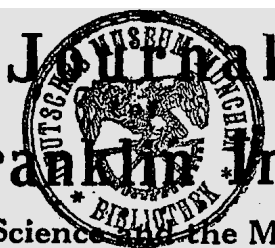
(Sommerfeld to Landé, 15 February 1929)

„ ... next to me is a paper for the National Academy in Washington which I just finished, as result of my Pacific and Californian leisure.“

(Sommerfeld to his wife, 10 March 1929)

„Mr. Loomis, the host of 30 guests and 110 visitors who attended the lectures today ... is a Wallstreet man and physicist, very nice, also his wife and his boys. Of course I had to deliver one of the lectures today and of course I had to perform music yesterday evening (together with a cello player).“

(Sommerfeld to his wife, 15 April 1929)



The Franklin Institute

Devoted to Science and the Mechanic Arts

Vol. 208

NOVEMBER, 1929

No. 5

The following five papers were read at a symposium held in honor of Professors Sommerfeld and Ornstein at the Loomis Laboratory, Tuxedo Park, New York, April 15, 1929.

THE EDITORS.

ON THE PRODUCTION OF X-RADIATION, ACCORDING TO WAVE MECHANICS.

BY

ARNOLD SOMMERFELD, Ph.D., Eng.D., M.D.

Director of Institute for Theoretical Physics, University of München.

As early as twenty years ago, I gave¹ an account of the production of general X-radiation from the standpoint of the classical theory. The quantum theory had not been developed sufficiently at that time and was not, in any case, sufficiently familiar to myself. The assumption was made that the cathode particles impinging on the target became retarded in a rectilinear manner, so as to prolong the direction of the incident beam by a finite distance OO' into the target; comp. Fig. 1. The electromagnetic radiation emitted by this process of stoppage is given by the formula

$$(1) \quad E = H = \frac{e\dot{v}}{c^2 r} \frac{\sin \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^3},$$

r being the distance from the target O to the point P where the X-ray is observed and θ , the angle between the incident

¹ A. Sommerfeld, as a colleague of the late Professor Roentgen, *Physikal. Zeitsch.*, 10, p. 969, 1909.

„When I crossed the Pacific, I tried to account for the angular distribution of intensity in the experiments of Kulenkampff and to understand the difference between these and the former experiments with thick anti-cathodes. This task has turned out to be rather a long one. I shall report here the first steps in this direction; the main discussion of Kulenkampff's angular distribution of X-radiation is given in a paper presented to the National Academy of America...“

(Sommerfeld in *Journal of the Franklin Institute*, November 1929)

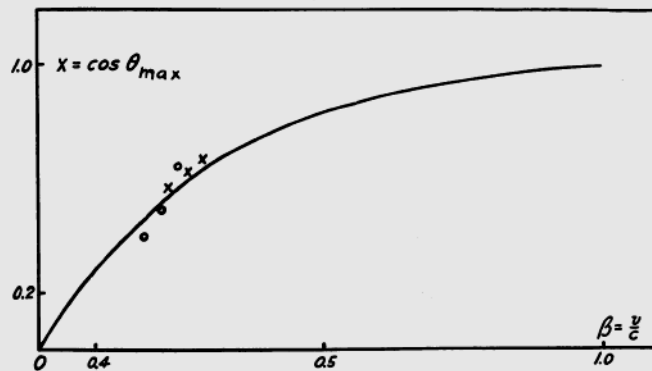
ABOUT THE PRODUCTION OF THE CONTINUOUS X-RAY SPECTRUM

By A. SOMMERFELD

CALIFORNIA INSTITUTE OF TECHNOLOGY, PASADENA

Communicated March 18, 1929

$$J = C \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^6} \quad (9)$$



We see, at once, from this expression, as mentioned already in connection with equation (2), that the shift of the maximum intensity toward small angles θ will now be *larger* than in our former theory. We see, moreover, that the *shift will be larger for the longer wave-lengths of the continuous spectrum than for the short wave-length limit*. This conclusion seems at the first view somewhat paradoxical, but it is checked, as we will see, by Kulenkampff's experiments.

purpose a more detailed computation of our moment M . I must leave that for a fuller paper to be published later in the *Annalen der Physik*.

In conclusion, I think that the old problem of the stoppage of cathode particles, attacked by Stokes, J. J. Thomson and Wiechert immediately after Roentgen's discovery, can now be solved by the mathematical methods of wave mechanics in a satisfactory way, as is shown by the foregoing discussion of the few experimental data available for the shift of the intensity maximum in the continuous x-ray spectrum.

„ ... a number of informal colloquia to be held during the Washington meetings of the Physical Society and the National Academy, April 18-24. ... Now we are asking you if it would be possible for you to give a talk there, too, on any subject you would see fit — perhaps on your theory of the continuous X-ray spectrum.

(Laporte to Sommerfeld, 3 April 1929)

„I have the honor to inform you that you were elected a Foreign Associate of the National Academy of Sciences at its Annual Meeting held in Washington from April 22 to 24, 1929.“

(Millikan to Sommerfeld, 24 April 1929)

ANNALEN DER PHYSIK

VIERTE FOLGE. BAND 87

1. *Untersuchungen der kontinuierlichen Röntgenstrahlung dünner Aluminiumfolien;*
von *Helmuth Kulenkampff*

Inhaltsübersicht: Einleitung. I. Die Versuchsanordnung; II. Untersuchungen über die spektrale Zusammensetzung der Strahlung; III. Isochromaten; IV. Die azimutale Intensitätsverteilung.

Einleitung

Die Eigenschaften der kontinuierlichen Röntgenstrahlung sind in zahlreichen Untersuchungen bereits sehr eingehend erforscht worden. Alle diese Untersuchungen leiden jedoch an dem Übelstand, daß zwei störende Einflüsse vorhanden sind, welche es erschweren, aus den Beobachtungen Schlußfolgerungen auf die wahre Natur des Emissionsvorganges zu ziehen. Es sind dies einmal der *Geschwindigkeitsverlust*, den die Kathodenstrahlen beim Eindringen in die Antikathode einer Röntgenröhre erleiden. Er bewirkt, daß auch bei konstanter Gleichspannung an der Röhre die Strahlung von Elektronen aller Geschwindigkeiten vom Höchstwert bis herab zum Werte Null erzeugt wird. Es kommt hinzu der störende Einfluß der *Diffusion* der Kathodenstrahlen, d. h. die allmählichen Ablenkungen der Elektronen aus ihrer geradlinigen Bahn, wodurch die ursprünglich vorhandene Vorzugsrichtung weitgehend aufgehoben wird.

Man kann, soweit es sich um den Geschwindigkeitsverlust allein handelt, seinen Einfluß, etwa auf die Gestalt des Spektrums, rechnerisch eliminieren, da die Abhängigkeit der spektralen Energieverteilung von der Kathodenstrahlgeschwindigkeit bekannt ist. Man kann aber nicht in einer analogen Weise den Einfluß der Diffusion in Rechnung setzen bei allen denjenigen Problemen, bei denen eine Abhängigkeit von der Emissionsrichtung zu untersuchen ist; Beobachtungen gewöhnlicher Art können hier nur eine undefinierte Mittelung

I would like to add a remark about the continuous x-ray spectrum because I learned from your last letter to Scherrer that you are occupied with this. Mr. Oppenheimer has accomplished a paper on this subject with me here in Zurich which is in print at the Zeitschrift für Physik for some time. Assuming Hydrogen-like eigenfunctions he has elaborated with irreproachable methods everything which one can wish about this subject. We had not many experimental data; what is available is rather complicated because of the braking processes in metals. If Kulenkampff has new results from very thin foils this would be wonderful. Hopefully this work does not interfere with your own working plans, all of us would be very sorry about that!

(Pauli to Sommerfeld, 16 May 1929)

Über die Beugung und Bremsung der Elektronen Von A. Sommerfeld

(Mit 12 Figuren)

Übersicht: Der I. Teil bildet eine systematische Einleitung zu der Behandlung des kontinuierlichen Röntgenspektrums im II. Teil. Der I. Teil geht nur in der Methode, nicht in den Resultaten über die Arbeiten von Gordon, Mott, Temple hinaus. Der II. Teil setzt, im Gegensatz zu Arbeiten von Oppenheimer und Sugiura den Endzustand des gebremsten Elektrons als ebene, durch Beugung modifizierte Welle an. Polarisation und Intensität im kontinuierlichen Spektrum werden nach der Methode der Matrixelemente berechnet. Um die azimutale Verteilung der Intensität, insbesondere die Voreilung des Maximums zu erhalten, muß die Rechenmethode verfeinert werden durch Berücksichtigung der Retardierung. Die Resultate werden mit Messungen von Kulenkampff verglichen.

I. Teil:

Beugung von Korpuskularstrahlen am einzelnen Atom bzw. Kern § 1. Formulierung des Beugungsproblems. Endlicher Bereich

Die Beeinflussung (Beugung, Bindung, Bremsung) eines Elektrons durch ein Atom von n Elektronen bedeutet wellenmechanisch ein Problem von $n + 1$ Elektronen. Die Beugung am reinen Kern ($n = 0$) führt also auf die Eigenfunktionen des Wasserstoffes, die Beugung an einem Wasserstoff- oder wasserstoffähnlichen Atom auf die Eigenfunktionen des Heliums¹⁾, die Beugung an Heliumatomen auf die Lithium-eigenfunktionen usw. Natürlich handelt es sich, bei der Beugung am neutralen Atom der Ordnungszahl Z , nicht um die Eigenfunktionen des neutralen Atoms der Ordnungszahl $Z + 1$, sondern um die des negativen Ions ($Z + 1$ Elektronen, aber Kernladung Z).

1) Bei dieser Auffassung wird die Möglichkeit des Austausches (einfallendes Elektron gegen Atomelektron) von selbst berücksichtigt.

Das allgemeine Ergebnis dieses Paragraphen läßt sich so zusammenfassen: Die in der negativen x -Richtung einfallende, am Atomkern Z gestreute Materiewelle von der Wellenzahl k wird in parabolischen Koordinaten dargestellt durch

$$(55) \quad \psi = e^{ikx} L(u, n), \quad u = ik\eta, \quad n = \frac{Z}{ik a}.$$

L wird durch die Integrale (43) bis (46) definiert und durch die konvergente Reihe (50) wiedergegeben. Die asymptotische Darstellung von L setzt sich aus (51) und (52) zusammen;

Bei der Ableitung des Normierungsfaktors N wollen wir den einfacheren Fall der reinen ebenen Welle ($Z = 0$, keine Kernstreuung) voranstellen. Wir setzen also etwa:

$$\psi(P_1, X) = e^{ik_1 x}, \quad \psi(P_2, X) = e^{i(ax + by + cz)}.$$

Wir übertragen dies auf unsere Eigenfunktion ψ (mit Kernstreuung). Dazu vergleichen wir das asymptotische Verhalten von ψ (durch Streuung modifizierte ebene Welle) mit e^{ikx} (reine ebene Welle). Gl. (54) besagt, bei Vernachlässigung des zweiten, im allgemeinen (vgl. unten) kleinen Gliedes:

$$\psi = \frac{(ik\eta)^n}{\Gamma(n+1)} e^{ikx - i\pi n}, \quad \psi^* = \frac{(-ik\eta)^{-n}}{\Gamma(-n+1)} e^{-ikx - i\pi n},$$

also, wegen $i^n = (-i)^{-n} = e^{i\pi n/2}$

$$(F) \quad \psi \psi^* = \frac{e^{-i\pi n}}{\Gamma(n+1)\Gamma(-n+1)} = \frac{e^{-i\pi n} \sin \pi n}{\pi n} = \frac{1 - e^{-2i\pi n}}{2i\pi n},$$

während für die ebene Welle gilt:

$$e^{ikx} \cdot e^{-ikx} = 1.$$

Mit dem Reziproken des Faktors (F) müssen wir (E) multiplizieren, um das N^2 unserer Eigenfunktion ψ zu erhalten. Letzteres wird also:

$$(G) \quad N^2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{i n}{1 - e^{-2i\pi n}}.$$

Problems and Principles

„Consider the problem of the continuous x-ray spectrum, i. e. the Bremsstrahlung, as I call it since more than 20 years. It is very instructive to compare the older treatment of this problem, based on classical notions, with the modern treatment based on wave mechanics.

The primitive treatment made use of particular hypotheses which were completely arbitrary. One had to assume, for example, that the electrons which were shot against the anti-cathode were stopped at the end of a determined path, straight and in the direction of the impingement; furthermore it had been assumed that their velocity was uniformly diminishing to zero in this braking process. The nature of the emitted radiation, as well as its polarization, depended essentially on these arbitrary assumptions.

When one treats the same problem by the new methods, every hypothesis of this kind becomes superfluous. ...“

(A. Sommerfeld: Sur quelques problèmes de mécanique ondulatoire. Annales de l'institut Henri Poincaré, 2 no. 1 (1932), p. 1-24)

Extension of bremsstrahlen theory in Sommerfeld's school

O. Scherzer: Über die Ausstrahlung bei der Bremsung von Protonen und schnellen Elektronen, Annalen der Physik, 1932

A. W. Maue: Das kontinuierliche und kontinuierlich-diskrete Röntgenspektrum nach der Theorie von Kramers und nach der Wellenmechanik. Annalen der Physik, 1932

F. Sauter: Zur unrelativistischen Theorie des kontinuierlichen Röntgenspektrums, Annalen der Physik, 1933; Zur stationären Behandlung der elastischen Streuung sehr schneller Elektronen, Zeitschrift für Physik, 1933

H. Bethe/W. Heitler: On the Stopping of Fast Particles and on the Creation of Positive Electrons, Proc. R. Soc. Lond. A 1934

A. Sommerfeld/A. W. Maue: Über den Bremsverlust von Kathodenstrahlen beim Auftreffen auf Atomkerne, Annalen der Physik, 1935

G. Elwert: Verschärfte Berechnung von Intensität und Polarisation im kontinuierlichen Röntgenspektrum, Annalen der Physik, 1939

A. Sommerfeld: Atombau und Spektrallinien. II. Band, 1939

The Bethe-Heitler calculation of photon production (called by its German name, "bremsstrahlung") and pair production was the most important achievement of QED in the 1930's. The calculation was a tour de force of analytical skill, and it explained quantitatively the observations of cosmic-ray showers, in which high-energy electrons passing through the atmosphere generated a multitude of lower-energy electrons, positrons, and photons traveling together in the same direction.

(Freeman Dyson in *Hans Bethe and his Physics*, 2006, p. 161)

Apart from the interest in the nature of the process itself, there are a variety of reasons why the bremsstrahlung process occupies such an important place in physics. Firstly, the process is related to the fundamentals of the theory since it is a consequence of the general coupling of the electromagnetic field and matter fields. Therefore bremsstrahlung appears in nearly all branches of physics: atomic and nuclear, solid-state and elementary-particle physics. Moreover, bremsstrahlung is an important tool in many areas of experimental research, in the field of astrophysics, and it has a wide range of technical applications.“

(E. Haug/W. Nakel: *The Elementary Process of Bremsstrahlung*, 2003)

Miller, WC, Waldman, B: An Investigation of Bremsstrahlung by Means of the Nuclear Isomerism of Indium. *Phys. Rev.* 75 (1949)

Bethe, HA, Maximon, LC: Theory of Bremsstrahlung and Pair Production. 1. Differential Cross Section. *Phys. Rev.* 93 (1954)

Dolan, JF: Polarization of Celestial X-Rays. *Space Science Reviews* 6 (1967)

Bostick, WH, Nardi, V, Prior, W: Production and Confinement of High-Density Plasmas. *Annals of the New York Academy of Science* 251 (1975)

Haug, E, Elwert, G, Rausaria, RR: Effect of Electron-Energy and Angular-Dispersion on Hard X-Ray-Polarization During Solar Flares. *Astronomy & Astrophysics* 148 (1985)

Baer, H, Cheung, K, Gunion, JF: Heavy Gluino as the Lightest Supersymmetric Particle. *Phys. Rev. D* 59 (1999)

Strumia, A: Dark Matter Interpretations of the Cosmic-Ray $e^{+/-}$ excesses. *Theoretical and Mathematical Physics* 170 (2012)

The cosmic-ray excess observed by PAMELA in the positron fraction and by FERMI and HESS in $e^{-}+e^{+}$ can be interpreted in terms of dark matter annihilations or decays. We summarize the main possibilities and their possible tests.

A Theory of Dark Matter

Nima Arkani-Hamed,¹ Douglas P. Finkbeiner,² Tracy R. Slatyer,³ and Neal Weiner⁴

¹*School of Natural Sciences, Institute for Advanced Study, Princeton, NJ 08540, USA*

²*Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics, 60 Garden St., Cambridge, MA 02138, USA*

³*Physics Department, Harvard University, Cambridge, MA 02138, USA*

⁴*Center for Cosmology and Particle Physics, Department of Physics,
New York University, New York, NY 10003, USA*

(Dated: January 20, 2009)

We propose a comprehensive theory of dark matter that explains the recent proliferation of unexpected observations in high-energy astrophysics. Cosmic ray spectra from ATIC and PAMELA require a WIMP with mass $M_\chi \sim 500 - 800$ GeV that annihilates into leptons at a level well above that expected from a thermal relic. Signals from WMAP and EGRET reinforce this interpretation. Limits on \bar{p} and $\pi^0\text{-}\gamma$'s constrain the hadronic channels allowed for dark matter. Taken together, we argue these facts imply the presence of a new force in the dark sector, with a Compton wavelength $m_\phi^{-1} \gtrsim 1$ GeV⁻¹. The long range allows a Sommerfeld enhancement to boost the annihilation cross section as required, without altering the weak-scale annihilation cross section during dark matter freeze-out in the early universe. If the dark matter annihilates into the new force carrier ϕ , its low mass can make hadronic modes kinematically inaccessible, forcing decays dominantly into leptons. If the force carrier is a non-Abelian gauge boson, the dark matter is part of a multiplet of states, and splittings between these states are naturally generated with size $\alpha m_\phi \sim$ MeV, leading to the exciting dark matter (XDM) scenario previously proposed to explain the positron annihilation in the galactic center observed by the INTEGRAL satellite; the light boson invoked by XDM to mediate a large inelastic scattering cross section is identified with the ϕ here. Somewhat smaller splittings would also be expected, providing a natural source for the parameters of the inelastic dark matter (iDM) explanation for the DAMA annual modulation signal. Since the Sommerfeld enhancement is most significant at low velocities, early dark matter halos at redshift ~ 10 potentially produce observable effects on the ionization history of the universe. Because of the enhanced cross section, detection of substructure is more probable than with a conventional WIMP. Moreover, the low velocity dispersion of dwarf galaxies and Milky Way subhalos can increase the substructure annihilation signal by an additional order of magnitude or more.

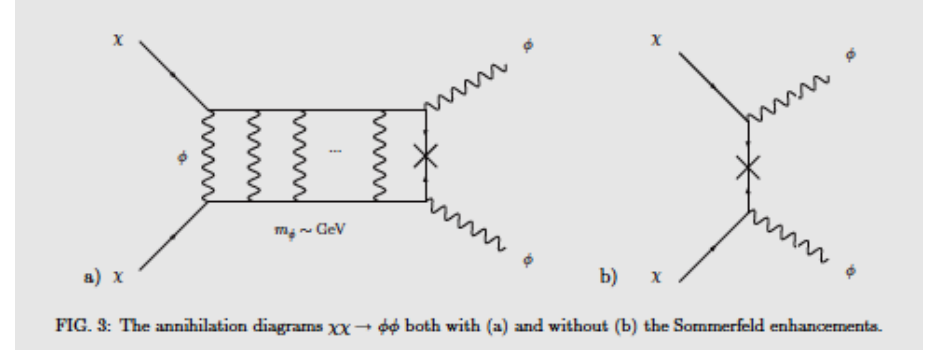


FIG. 3: The annihilation diagrams $\chi\chi \rightarrow \phi\phi$ both with (a) and without (b) the Sommerfeld enhancements.

In the limit where the ϕ mass goes to zero ($\epsilon_\phi \rightarrow 0$), the effective potential is just the Coulomb potential and Eq. 8 can be solved analytically, yielding an enhancement factor of,

$$S \equiv |\psi(\infty)/\psi(0)|^2 = \frac{\pi/\epsilon_v}{1 - e^{-\pi/\epsilon_v}}. \quad (9)$$

Sommerfeld's bremsstrahlung paper in retrospect

